

TD n°3: Intégration et théorie de Cauchy

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Formule de Stokes

Note informelle sur l'intégration et les formes différentielles

Soit C une courbe lisse, disons avec deux extrémités (l'image d'un segment), dans $\mathbb{R}^2$. Comment intégrer une fonction continue $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ sur C ? L'approche de Riemann nous suggère de choisir une orientation pour la courbe (d'une extrémité vers l'autre), de prendre n points sur la courbe en respectant cette orientation et de considérer la quantité

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(p_k) |\delta p_k|$$

où $\delta p_k = p_{k+1} - p_k$, l'idée étant que $|\delta p_k|$ est approximativement la longueur de la courbe entre p_k et p_{k+1} si les p_i sont suffisamment rapprochés. On peut réécrire $|\delta p_k| = \frac{\delta p_k}{|\delta p_k|} \cdot \delta p_k$: ce changement peut paraître mineur, mais il transforme $f(p_k) |\delta p_k|$ en

$$f(p_k) \frac{\delta p_k}{|\delta p_k|} \cdot \delta p_k.$$

Quand $\delta p_k \rightarrow 0$, δp_k devient essentiellement un vecteur tangent (très petit) à C en p_k et $f(p_k) \delta p_k / |\delta p_k|$ devient la forme linéaire sur l'espace tangent à C en p_k qui donne la valeur $f(p_k)$ au vecteur tangent unitaire.

La forme linéaire $f(p_k) \delta p_k / |\delta p_k|$ est la forme linéaire sur la droite tangente à C qui donne la valeur $f(p)$ au vecteur tangent unitaire à C en p , orienté positivement. Rien ne nous force cependant à privilégier cette forme linéaire à une autre : on peut par exemple choisir la projection sur la première coordonnée, ce qui correspond aux sommes de Riemann

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(p_k) (x_{k+1} - x_k) \sim \int_C f(x, y) dx.$$

De manière générale, le bon objet à intégrer sur une courbe est une application continue ω qui à $p \in C$ associe une forme linéaire ω_p sur la droite tangente à C en p . On appelle "forme différentielle" une telle ω . Notez que comme on peut multiplier une forme linéaire par un nombre réel, on peut toujours multiplier une forme différentielle par une fonction continue f , par la formule

$$(f \cdot \omega)_p(v) := f(p) \omega_p(v).$$

On peut se donner une idée de comment intégrer la forme différentielle ω sur C en considérant des sommes de Riemann de la forme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_{p_k}(\delta p_k).$$

Le cas de $\int_C dx$ correspond à la restriction de la forme différentielle "constante" $p \mapsto ((u, v) \mapsto u)$ à C , c'est-à-dire

$$dx|_C := p \in C \mapsto ((u, v) \in T_p C \mapsto u)$$

où $T_p C$ est la droite (vectorielle) tangente à C dans $\mathbb{R}^2$. Pour être plus rigoureux, si ω est une forme différentielle sur C , et $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$ est une paramétrisation, alors on peut définir

$$\int_C \omega = \int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

On peut prouver avec des outils basiques de géométrie différentielle que cette définition donne un nombre indépendant de la paramétrisation. Pour rester cohérent avec la notation de l'intégrale, on note généralement dx_i la forme différentielle correspondant à la projection sur la i -ème coordonnée (vous noterez que c'est également la différentielle de l'application $(x_1, \dots, x_d) \mapsto x_i$). Vous pouvez vérifier que

$$\int_0^1 f(t) dt$$

correspond précisément à l'intégrale de la *forme différentielle* qui à un vecteur tangent v à $[0, 1]$ en t (c'est-à-dire un nombre réel) associe la valeur $f(t)v$, c'est à dire l'intégrale de la forme différentielle $f(t)dt$.

Vous pouvez également vérifier que si vous changez de paramétrisation, par exemple en considérant $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une bijection croissante C^1 , les paramétrisations γ et $\gamma \circ \varphi$ donnent la même valeur de l'intégrale $\int_C \omega$.

Exercice 1. Formule de Stokes holomorphe-antiholomorphe.

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact à bord C^1 par morceaux, f, g des fonctions C^1 définies au voisinage de K . Montrer que la formule de Stokes se réécrit :

$$\int_{\partial K} f(z)dz + g(z)d\bar{z} = 2i \int_K \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dx dy$$

On développe

$$f dz + g d\bar{z} = f dx + i f dy + g dx - i g dy.$$

On applique la formule de Stokes à $f + g$ et $i(f - g)$, ce qui donne

$$\int_{\partial K} f dz + g d\bar{z} = \int_K i \frac{\partial(f - g)}{\partial x} - \frac{\partial(f + g)}{\partial y} dx dy.$$

On vérifie finalement que

$$i \frac{\partial(f - g)}{\partial x} - \frac{\partial(f + g)}{\partial y} = 2i \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right)$$

ce qui conclut.

Exercice 2. Aires de polygones réguliers.

On désire calculer l'aire du n -gone régulier, c'est-à-dire l'enveloppe convexe dans $\mathbb{C}$ des racines n -èmes de l'unité. On note P_n le polygone, A_n son aire et on fixe $\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

- Donner les formules paramétrant les n segments $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ qui paramètrent le bord ∂P_n .

Le chemin γ_j correspond au segment de ζ_n^j à ζ_n^{j+1} , il est paramétré par

$$\gamma_j : t \mapsto \zeta_n^j (1 + t(\zeta_n - 1))$$

- Montrer en utilisant la formule de Stokes que

$$A_n = \frac{1}{2i} \int_{\partial P_n} \bar{z} dz.$$

On pose $f(z) = \bar{z}$, $g(z) = 0$. La formule de Stokes donne :

$$2i \int_{P_n} dx dy = \int_{\partial P_n} \bar{z} dz$$

et comme $\int_{P_n} dx dy = A_n$, on conclut.

- Démontrer que

$$\int_{\gamma_j} \bar{z} dz = i \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

et conclure.

Le long de γ_j , on a $\bar{z} = \bar{\zeta}_n^j (1 + t(\bar{\zeta}_n - 1))$ et $dz = \zeta_n^j (\zeta_n - 1)$, donc $z d\bar{z} = (\zeta_n - 1)(1 + t(\bar{\zeta}_n - 1)) dt$. En intégrant, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} \bar{z} dz &= \int_0^1 (\zeta_n - 1)(1 + t(\bar{\zeta}_n - 1)) dt \\ &= \frac{1}{2} (\zeta_n - 1)(\bar{\zeta}_n + 1) \\ &= \frac{1 + \zeta_n - \bar{\zeta}_n - 1}{2} \\ &= i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

On conclut que $A_n = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Exercice 3. Le théorème de la divergence.

On désire prouver, à partir de la formule de Stokes, le théorème de la divergence. Pour cet exercice, on note $\dot{f}$ la dérivée en t de f .

Théorème de la divergence.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ à bord C^1 , U un voisinage de K et $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs C^1 . Alors :

$$\int_K \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy = \int_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} ds$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale sortante unitaire à ∂K et ds est l'élément de longueur de ∂K , c'est-à-dire $u dx + v dy$ où (u, v) est un vecteur tangent au bord de K unitaire et positivement orienté.

1. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un chemin C^1 de dérivée non-nulle qui paramétrise localement ∂K (avec la bonne orientation). Exprimer la normale sortante unitaire $\boldsymbol{\nu}$, le vecteur tangent unitaire, et les éléments de longueur dx, dy en fonction de $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ et dt .

La normale sortante unitaire est donnée par

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{bmatrix}.$$

Le vecteur tangent unitaire est $\frac{1}{|\dot{\gamma}|} \dot{\gamma}$. Les éléments dx et dy sont respectivement donnés par $\dot{x}(t)dt$ et $\dot{y}(t)dt$.

2. Démontrer que $ds = |\dot{\gamma}(t)|dt$, puis que $\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} ds = f dy - g dx$ où $\mathbf{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$.

Le calcul donne

$$\begin{aligned} ds &= \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} (\dot{x}(t)dt + \dot{y}(t)dt) \\ &= \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} (\dot{x}(t)^2 dt + \dot{y}(t)^2 dt) \\ &= |\dot{\gamma}(t)| dt. \end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} (f \dot{y} - g \dot{x})$$

et donc

$$\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} ds = (f \dot{y} - g \dot{x}) dt = f dy - g dx$$

3. Démontrer que

$$\int_K \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy = \int_{\partial K} f dy - g dx$$

et conclure.

Le calcul découle directement de la formule de Stokes (en changeant un signe).

**Exercice 4. La solution fondamentale du laplacien en dimension deux.**

On désire démontrer l'égalité suivante : si $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ à support compact, alors :

$$\int_{\mathbb{C}} \Delta \varphi(z) \log |z| dx dy = 2\pi \varphi(0)$$

On définit l'ouvert $U_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < \varepsilon^{-1}\}$ et on pose T_ε le cercle de centre 0 et de rayon ε .

1. Justifier que l'intégrale converge.

La convergence à l'infini est claire car l'intégrale a lieu sur le support de φ , qui est un compact.

La convergence en zéro peut se prouver par exemple en intégrant en coordonnées polaires :

$$\int_{\mathbb{D}(0,R)} \Delta \varphi(z) \log |z| dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R \Delta \varphi(re^{i\theta}) \log(r) r dr d\theta.$$

La fonction $r \mapsto r \log(r)$ s'étend continument à $[0, r]$, et l'intégrale converge donc sans problème.

2. Montrer que pour toute fonction C^∞ à support compact φ , on a

$$\int_{\mathbb{C}} \varphi(z) \log |z| dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{U_\varepsilon} \varphi(z) \log |z| dx dy.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, φ est identiquement nulle sur $\{|z| > \varepsilon^{-1}\}$. Le théorème de convergence dominée (en dominant par exemple par $\sup |\varphi| \log |z|$) permet de conclure.

3. Montrer que sur un ouvert U à bord C^1 par morceaux, pour f, g fonctions C^2 au voisinage de l'adhérence de U , on a l'égalité

$$\frac{i}{2} \int_U [f(z) \Delta g(z) - \Delta f(z) g(z)] dx dy = \int_{\partial U} f(z) \partial g(z) dz + \bar{\partial} f(z) g(z) d\bar{z}.$$

On veut appliquer la formule de Stokes, on calcule donc :

$$\bar{\partial}(f(z) \partial g(z)) = \bar{\partial} f(z) \partial g(z) + f(z) \partial \bar{\partial} g(z) = \bar{\partial} f(z) \partial g(z) + \frac{1}{4} f(z) \Delta g(z).$$

Un calcul similaire donne

$$\partial(\bar{\partial} f(z) g(z)) = \bar{\partial} f(z) \partial g(z) + \frac{1}{4} \Delta f(z) g(z)$$

et le résultat découle donc du fait que

$$f(z) \Delta g(z) - \Delta f(z) g(z) = 4 \bar{\partial}(f(z) \partial g(z)) - 4 \partial(\bar{\partial} f(z) g(z)).$$

4. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :

$$\int_{U_\varepsilon} \Delta \varphi(z) \log |z| dx dy = -2i \int_{T_\varepsilon} \varphi(z) \partial \log |z| dz + \bar{\partial} \varphi(z) \log |z| d\bar{z}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, φ est identiquement nulle sur $|z| > \varepsilon^{-1}$, et a fortiori $\Delta \varphi$ aussi : il ne reste donc que l'intégrale sur le bord intérieur de U_ε , qui est T_ε orienté dans le sens **horaire**. On applique alors la formule ci-dessus à $f = \varphi$ et $g = \log |z|$, ce qui donne le résultat voulu (attention au signe dû au sens dans lequel on intègre) car $\log |z|$ est harmonique.

5. Montrer $\partial \log |z| = \frac{1}{2z}$.

Un calcul brute-force marche bien ici. On peut aussi être malin.e : sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, on considère la fonction $\log$, donnée par $\log(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta$ pour $r > 0$, $\theta \in]-\pi, \pi[$. C'est une fonction holomorphe (on peut le vérifier avec Cauchy-Riemann polaire par exemple, ou utiliser la définition du $\log$ par série entière), et on calcule

$$\log(z) + \log(\bar{z}) = \log(r) + i\theta + \log(r) - i\theta = 2 \log |z|.$$

Comme $z \mapsto \log(\bar{z})$ est antiholomorphe, on trouve $\partial \log |z| = \frac{1}{2z}$ sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ et donc sur tout $\mathbb{C}^*$ par continuité.

6. Estimer les intégrales

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon e^{it}) dt$$

et

$$\varepsilon \int_0^{2\pi} \bar{\partial} \varphi(\varepsilon e^{it}) \log(\varepsilon) e^{it} dt$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et conclure.

La première intégrale converge clairement vers $2\pi\varphi(0)$ (simplement par continuité de φ), et la deuxième tend vers 0 à cause du facteur $\varepsilon \log(\varepsilon)$. On a donc le résultat voulu.

Applications du théorème de Cauchy



Exercice 5. Intégrales gaussiennes.

1. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. En intégrant sur un rectangle bien choisi, prouver que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$$

et en déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-i\xi x} dx = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}.$$

On intègre sur le rectangle dont les coins sont $-R, R, R - i\xi, -R - i\xi$. On estime les intégrales sur les bords verticaux du rectangle :

$$\int_0^\xi e^{-(\pm R - it)^2} dt = e^{-R^2} \int_0^\xi e^{\pm Rit + t^2} dt$$

converge clairement vers zéro quand $R \rightarrow \infty$, et donc en appliquant la formule de Cauchy à la fonction analytique e^{-z^2} sur le rectangle, on obtient

$$\int_{-R}^R e^{-x^2} dx - \int_{-R}^R e^{-(x-i\xi)} dx + o(1) = 0$$

ce qui conclut pour la première égalité.

Pour la deuxième égalité, il suffit de compléter le carré :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-i\xi x} dx = e^{-\xi^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi/2)^2} dx = e^{-\xi^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}.$$

2. En intégrant la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ sur un secteur angulaire bien choisi, prouver la convergence de l'intégrale suivante (au sens faible) et la calculer :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it^2} dt.$$

On intègre la fonction sur le secteur angulaire d'angle $\pi/4$, composé de $\gamma_R^1(t) = t$ sur $[0, R]$, $\gamma_R^2(t) = Re^{it}$ sur $[0, \pi/4]$ et $\gamma_R^3(t) = e^{i\pi/4}(R - t)$ sur $[0, R]$. On peut estimer l'intégrale sur γ_R^2 comme suit :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2it}} i R e^{it} dt \right| &\leq R \int_0^{\pi/4} |e^{-R^2 e^{2it}}| dt \\ &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos(2t)} dt \\ &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(1-4t/\pi)} dt \\ &\leq R e^{-R^2} \frac{1}{R^2} e^{4t/\pi} \Big|_0^{\pi/4} \\ &\leq \frac{1}{R} (1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

La majoration $\cos(t) \geq 1 - 2t/\pi$ découle de la convexité de la fonction $\cos$ sur $[0, \pi/2]$. On trouve donc, par Cauchy :

$$\int_0^R e^{-t^2} dt - e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-it^2} dt = O\left(\frac{1}{R}\right)$$

et on a donc

$$\int_0^\infty e^{-it^2} dt = (1-i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 6. Intégrale le long d'une ellipse.

Soient $a, b > 0$. On considère la courbe γ donnée par l'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

1. Démontrer que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi.$$

L'équation définit une ellipse ne passant pas par zéro. En appliquant la formule de Stokes à l'ouvert délimité à l'extérieur par l'ellipse et à l'intérieur par un petit cercle de rayon $\varepsilon > 0$, on trouve

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\partial\mathbb{D}(0,\varepsilon)} \frac{dz}{z} = 2i\pi.$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}.$$

On peut paramétriser γ par $\gamma(t) = a \cos(t) + ib \sin(t)$. On obtient alors $\gamma'(t) = -a \sin(t) + ib \cos(t)$ et $\bar{\gamma}(t) = a \cos(t) - ib \sin(t)$. Un calcul direct donne :

$$(-a \sin(t) + ib \cos(t))(a \cos(t) - ib \sin(t)) = (b^2 - a^2) \sin(t) \cos(t) + iab(\sin^2(t) + \cos^2(t)).$$

Ainsi, on trouve

$$2i\pi = \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2) \sin(t) \cos(t)}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt + iab \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}.$$

On en conclut, en prenant les parties imaginaires, que l'intégrale voulue vaut $\frac{2\pi}{ab}$.

Exercice 7. Encore une intégrale.

En intégrant $z \mapsto \frac{\log(z)}{1-z}$ sur le bord de $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1, |z| \geq \varepsilon\}$, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos(\theta)) d\theta.$$

La fonction $z \mapsto \frac{\log(z)}{1-z}$ semble avoir un pôle en 1, mais on sait que $\log(z) = z - 1 + \dots$ au voisinage de 1, donc $\frac{\log(z)}{1-z}$ définit une fonction analytique sur l'intérieur de l'ouvert considéré.

En prenant $\varepsilon \rightarrow 0$, l'intégrale s'évalue à

$$\int_0^{2\pi} \frac{\log(1 + e^{it})}{-e^{it}} i e^{it} dt = 0$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + e^{it}) dt = 0.$$

On passe à la partie réelle, et on a

$$\int_0^{2\pi} \log|1 + e^{it}| dt = 0$$

On vérifie que $|1 + e^{it}| = |e^{-it/2} + e^{it/2}| = 2|\cos(t/2)|$, et donc

$$0 = \int_0^{2\pi} \log(2) + \log|\cos(t/2)| dt.$$

Après réarrangements et changement de variable, on obtient

$$\int_0^\pi \log|\cos(t)| dt = -\pi \log(2)$$

et on obtient le résultat voulu en remarquant que

$$\int_0^{\pi/2} \log(\cos(t)) dt = \int_{\pi/2}^\pi \log(-\cos(t)) dt.$$

Exercice 8. Primitives et logarithmes.

1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(a, \varepsilon)$. Démontrer que f admet une primitive, donnée par

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta.$$

où l'intégrale est prise sur n'importe quel chemin de a à z dans le disque.

On écrit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z-a)^n$, qui converge uniformément sur $|z-a| \leq \delta$ pour $\delta < \varepsilon$. Ainsi :

$$\int_a^z \sum_{n \geq 0} a_n(\zeta-a)^n d\zeta = \sum_{n \geq 0} a_n \int_a^z (\zeta-a)^n d\zeta = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1}.$$

C'est bien une primitive de f .

2. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe, f une fonction holomorphe sur U . Supposons que pour γ chemin C^1 par morceaux dans U , la quantité $\int_\gamma f(\zeta) d\zeta$ ne dépend que de $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. Démontrer que

$$z \mapsto \int_a^z f(\zeta) d\zeta$$

définit bien une fonction sur U , indépendamment du chemin de a à z choisi. Démontrer que cette fonction est holomorphe, de dérivée f .

Soit $b \in U$, $D \subseteq U$ un disque de centre b , sur lequel f est développable en série entière. Comme $\int_\gamma f(\zeta) d\zeta$ ne dépend que des extrémités de γ , on a

$$\int_a^z f(\zeta) d\zeta = \int_a^b f(\zeta) d\zeta + \int_b^z f(\zeta) d\zeta.$$

Le premier terme est une constante, et le deuxième terme définit une fonction holomorphe au voisinage de b , qui est une primitive de f sur ce voisinage. Ainsi, $\int_a^z f(\zeta) d\zeta$ définit bien une primitive de f sur U .

3. En déduire qu'une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ admet une primitive si et seulement si $\int_\gamma f(\zeta) d\zeta$ ne dépend que des extrémités de γ .

On doit juste montrer la réciproque, qui est la conséquence de

$$\int_\gamma F'(\zeta) d\zeta = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

4. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ ne s'annulant pas. Démontrer que si une primitive L de f'/f existe, alors elle vérifie $e^{L(z)} = Af(z)$, pour un certain $A \in \mathbb{C}^*$.

Dérivons $g(z) = e^{L(z)}/f(z)$.

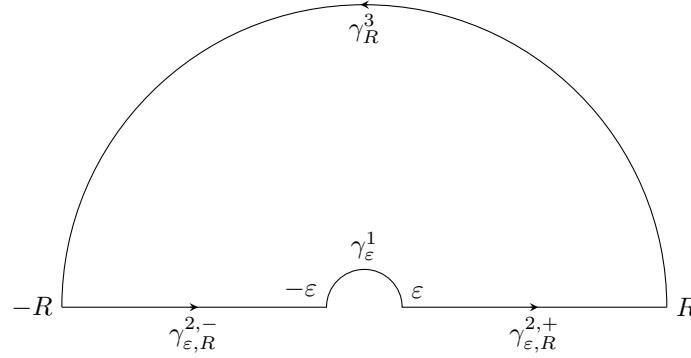
$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} e^{L(z)} \frac{1}{f(z)} - e^{L(z)} \frac{f'(z)}{f(z)^2} = 0.$$

Ainsi, $e^{L(z)}/f(z) = A$, A constante.

5. Soit U simplement connexe, et $f \in \mathcal{O}(U)$ ne s'annulant pas. Démontrer qu'il existe $L \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f(z) = e^{L(z)}$.

Comme deux chemins entre deux points sont toujours homotopes (par définition de la simple connexité), toute fonction holomorphe admet une primitive, en particulier f'/f .

 **Exercice 9. L'intégrale de Dirichlet.**
On définit un contour $\gamma_{\varepsilon, R}$ comme suit : $\gamma_{\varepsilon}^1(t) = \varepsilon e^{i(\pi-t)}$ sur $[0, \pi]$, $\gamma_{\varepsilon, R}^{2, \pm}(t) = \pm t$ sur $[\varepsilon, R]$ et $\gamma_R^3(t) = Re^{it}$ sur $[0, \pi]$ (voir dessin).



1. Démontrer que $\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{-it}} dt \rightarrow \pi$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

On le déduit de la continuité de $z \mapsto e^z$ en 0 et du théorème de convergence dominée.

2. En minorant $\sin(t)$ par $2t/\pi$ sur $[0, \pi/2]$, démontrer que

$$\int_0^\pi e^{-R \sin(t)} dt = O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Comme $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, les intégrales sur $[0, \pi/2]$ et sur $[\pi/2, \pi]$ sont égales. On ne s'occupe que de la première :

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(t)} dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2tR\pi} dt = \frac{1}{R} (1 - e^{-R}).$$

C'est clairement un $O(1/R)$.

3. En déduire que

$$\int_{\gamma_{\varepsilon, R}^{2, -}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_{\varepsilon, R}^{2, +}} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \int_{\gamma_\varepsilon^1} \frac{e^{iz}}{z} dz + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

La fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ est analytique sur l'intérieur de l'ouvert défini par le contour, et on peut donc appliquer la formule de Cauchy. Il suffit de vérifier que l'intégrale sur γ_R^3 est un $O(1/R)$.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it} dt \right| &\leq \int_0^\pi e^{\Re(iRe^{it})} dt \\ &\leq \int_0^\pi e^{-R \sin(t)} dt = O\left(\frac{1}{R}\right) \end{aligned}$$

4. Démontrer que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\varepsilon, R}^{2, -}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_{\varepsilon, R}^{2, +}} \frac{e^{iz}}{z} dz &= 2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin(x)}{x} dx. \\ \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx &= \int_\varepsilon^R \left(\frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{-x} \right) dx \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{2i \sin(x)}{x} dx \end{aligned}$$

5. En déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

La valeur de l'intégrale multipliée par $2i$ est, par la question 3, la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de

$$-\int_{\gamma_\varepsilon^1} \frac{e^{iz}}{z} = -\int_0^\pi \frac{e^{-i\varepsilon e^{i(\pi-t)}}}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}} \cdot -i\varepsilon e^{i(\pi-t)} dt = i \int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{-it}} dt.$$

Par la question 1, cette valeur est $i\pi$, et donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10. Transformées de Fourier à la Paley-Wiener.

Soit φ une fonction C^∞ à support compact inclus dans $[-A, A]$ avec $A > 0$.

1. Démontrer que la transformée de Fourier

$$\hat{\varphi}(z) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-izx} dx$$

est une fonction entière vérifiant l'estimation suivante : pour tout $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que

$$|\hat{\varphi}(z)| \leq C_N (1 + |z|)^{-N} e^{A|\Im(z)|}$$

On commence par remarquer que

$$\begin{aligned} z\hat{\varphi}(z) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) z e^{-izx} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) i \partial_x e^{-izx} dx \\ &= i \varphi(x) e^{-izx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - i \int_{\mathbb{R}} \partial_x \varphi(x) e^{-izx} dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}} \partial_x \varphi(x) e^{-izx} dx. \end{aligned}$$

Le terme $\varphi(x) e^{-izx} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$ est nul car φ est à support compact. Par récurrence, on trouve

$$z^k = i^k \int_{\mathbb{R}} \partial_x^k \varphi(x) e^{-izx} dx.$$

On vérifie alors que

$$\begin{aligned} |z^k \hat{\varphi}(z)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_x^k \varphi(x)| e^{\Im(z)x} dx \\ &\leq \int_{-A}^A |\partial_x^k \varphi(x)| e^{\Im(z)x} dx \\ &\leq 2A \sup_{x \in [-A, A]} |\partial_x^k \varphi(x)| e^{A|\Im(z)|} \end{aligned}$$

En développant $(1 + |z|)^N$, on obtient la constante universelle (en z) voulue.

2. Soit à présent f une fonction entière qui vérifie l'estimation précédente. On va démontrer que sa transformée de Fourier est une fonction C^∞ à support compact inclus dans $[-A, A]$.

(a) Démontrer que la transformée de Fourier de f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

L'idée est la suivante : la dérivée k -ème de $\int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-ixz} dz$ devrait être donnée par $(-i)^k \int_{\mathbb{R}} z^k f(z) e^{-ixz} dx$. L'estimation vérifiée par f assure que cette intégrale converge absolument, et que l'on peut dériver sous le signe intégral sans souci.

(b) Soit $x > 0$. Démontrer à l'aide de la formule de Cauchy que pour tout $T > 0$, on a :

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-ixz} dz = e^{-xT} \int_{\mathbb{R}} f(z - iT) e^{-ixz} dz.$$

On intègre sur le rectangle de sommets $-R, R, R - iT, -R - iT$. On a

$$\begin{aligned} \left| \int_R^{R-iT} f(z) e^{-izx} dz \right| &\leq \int_0^T |f(R - it) e^{-i(R-it)x}| dt \\ &\leq \int_0^T |f(R - it)| e^{-tx} dt \\ &\leq \int_0^T \frac{C_2}{(1 + R^2 + t^2)} e^{-tx} dt. \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand $R \rightarrow \infty$, et il en va de même pour l'intégrale sur le segment $[-R - iT, -R]$. On obtient finalement

$$\int_{[-R, R]} f(z) e^{-izx} dz = \int_{[-R-iT, R-iT]} f(z) e^{-izx} dz + o_{R \rightarrow \infty}(1).$$

En prenant $R \rightarrow \infty$, on obtient le résultat voulu.

(c) En faisant tendre $T \rightarrow \infty$, démontrer que si $x > A$, alors $\hat{f}(x) = 0$ et conclure.

On majore :

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x)| &\leq e^{-xT} \int_{\mathbb{R}} |f(z - iT)| dz \\ &\leq e^{-xT} \int_{\mathbb{R}} \frac{C_2}{(1 + T^2 + z^2)} e^{AT} dz \\ &\leq e^{(A-x)T} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + z^2} dz. \end{aligned}$$

En prenant $T \rightarrow \infty$, on obtient $\hat{f}(x) = 0$ si $x - A > 0$, donc si $x > A$. Pour avoir la même conclusion quand $x < -A$, il suffit d'appliquer le résultat précédent à $z \mapsto f(-z)$.